《 数学分析续论 》模拟试题

2006 年 6 月　复习资料

一、单项选择题

（1） 函数 $f(x)$ 在区间 I 上**无上界**的等价定义是 ………………… [C]

A． $\exists x \in I, \forall M>0,$ 使 $f(x)>M$ ；　　B． $\exists M>0,$ 使 $\forall x \in I,\ f(x)<M$ ；

C． $\forall M>0,$ 都有 $f(I) \cap (M,+\infty) \neq \varnothing$ ；　D． 以上 A、B、C 都不一定成立.

［理由］ 函数 $f(x)$ 在区间 I 上**无上界**的定义是：$\forall M>0, \exists \bar{x} \in I,$ 使得 $f(\bar{x})>M$. 即 $\exists \bar{x} \in I$，满足 $f(\bar{x}) \in f(I)$，且 $f(\bar{x}) \in (M,+\infty)$. 亦即

$$\exists f(\bar{x}) \in f(I) \cap (M,+\infty).$$

［思考题］ 将本题的“无上界”改为“无下界”或“无界”时，应如何修改相应的命题？

（2）设 $\{a_n\}$ 为一数列，且存在一收敛子列 $\{a_{n_j}\}$. 这时下面正确的是 …. [D]

A． $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{j\to\infty} a_{n_j}$ ；　　B． $\{a_n\}$ 可能收敛，但 **A** 不一定成立；

C． $\{a_n\}$ 必定不收敛；　　D． 当预先假设了 $\{a_n\}$ 收敛时，才有 A 成立.

［理由］ $\{a_n\}$ 收敛的**充要条件**为：$\{a_n\}$ 的**所有**子列 $\{a_{n_j}\}$ 都收敛，且必有相同极限. 故 **D** 成立.

［思考题］ 当设 $\{a_n\}$ 为一特殊的数列（例如**单调**数列）时，结论将有何变化？

（3）设 $f(x)$ 在某区间上存在反函数. 这时下面错误的是 …………… [B]

A． $f(x)$ 可以不严格单调；　　B． $f(x)$ 即使连续，也可以不严格单调；

C． f 与 f^{-1} 有相同的单调性；　　D． 当 $f(x)$ 可导时，一定严格单调.

［理由］ 当 $f(x)$ 为连续函数时，严格单调与存在反函数是等价的.

（4） 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上非负、可积，且 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=0$， 则必有 …… [C]

A． $f(x)\equiv 0,\ x\in[a,b]$； B．只允许在有限个点处 $f(x)>0$；

C．可以在无限个点处 $f(x)>0$； D．以上 A、B、C 都不一定成立．

［理由］ 例如黎曼函数 $R(x)$，它在 $[0,1]$ 上非负、可积，$\int_a^b R(x)\,\mathrm{d}x=0$，且在 $(0,1)$ 内所有有理点上取正值．

［思考题］ 若把本题条件“可积”该为“连续”，此时结论又将如何？

（5）设 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 为一正项级数．这时下面错误的是 ………………… [A]

A．若 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，则 $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}<1$； B．若 $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}<1$，则 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛；

C．若 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，则 $\lim_{n\to\infty}u_n=0$； D．以上 A、B、C 中必有一个是错的．

［理由］ 因为 $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}<1$ 是**正项**级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛的一个充分条件（**不是必要条件**），而 $\lim_{n\to\infty}u_n=0$ 是**任何**级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛的一个必要条件（**不是充分条件**），所以错误的结论只有 **A**．

［思考题］ 当把“正项级数”改为“一般项级数”时，结论又将如何？

二、计算题

（1）试求下列极限：

① $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2+4+\cdots+2n}{n-3}-n\right)$．

［解］ $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2+4+\cdots+2n}{n-3}-n\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n(n+1)}{2(n-3)}-n\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+n-(n^2-3n)}{n-3} = \lim_{n\to\infty} \frac{4n}{n-3} = 4 .$$

② $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\int_0^x (e^t - 1)\,dt}{x^2}$.

[解] 利用 $\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x)$ （其中 f 为连续函数），借助洛必达法则，有

$$\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x (e^t - 1)\,dt}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{2} = \frac{1}{2} .$$

（2）设

$$u = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad u_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad f(u) = \begin{bmatrix} \ln\sqrt{x^2+y^2} \\ \dfrac{1}{x^2+y^2} \end{bmatrix} .$$

试求 $f'(u)$ 与 $f'(u_0)$.

[解] 一般地，对于向量函数

$$u = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad f(u) = \begin{bmatrix} g(x,y) \\ h(x,y) \end{bmatrix} ,$$

其导数为一 2 × 2 矩阵，即

$$f'(u) = \begin{bmatrix} g'_x(x,y) & g'_y(x,y) \\ h'_x(x,y) & h'_y(x,y) \end{bmatrix} .$$

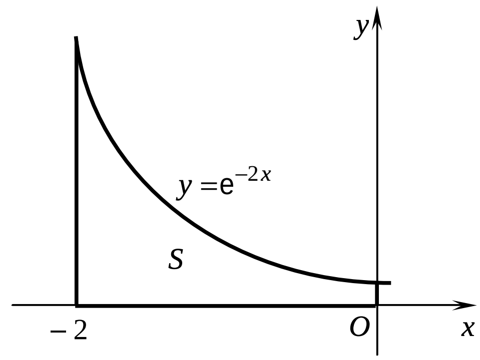
由此求得

$$f'(u) = \begin{bmatrix} \dfrac{x}{x^2+y^2} & \dfrac{y}{x^2+y^2} \\ \dfrac{-2x}{(x^2+y^2)^2} & \dfrac{-2y}{(x^2+y^2)^2} \end{bmatrix}, \quad f'(u_0) = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{10} & \dfrac{3}{10} \\ \dfrac{-1}{50} & \dfrac{-3}{50} \end{bmatrix} .$$

（3）试求由曲线 $y=\mathrm{e}^{-2x}$，直线 $x=-2, x=0$，以及 x 轴所围图形的面积 S .

[解]　由定积分的几何意义，所求

曲边梯形的面积为

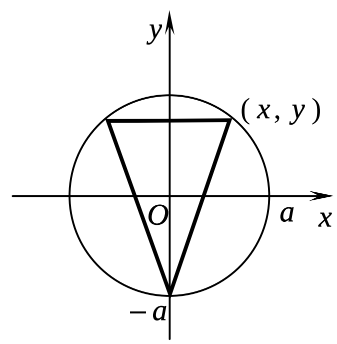


$$S=\int_{-2}^{0}\mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x$$
$$=-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x}\Big|_{-2}^{0}$$
$$=\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{4}-1).$$

（4）用条件极值方法（Lagrange 乘数法），求内接于圆 $x^2+y^2=a^2$ 的等腰三角形（如图）的最大面积.

[解]　如图所示，设内接等腰三角形的顶点坐标为 $(0,-a)$，底边一端为 (x,y)（不妨设 $x\geq 0$）. 于是，三角形的面积为 $S=x(a+y)$；而

(x,y) 是圆上任意一点，它满足条件 $x^2+y^2=a^2$.



依据 Lagrange 乘数法，设

$$L=x(a+y)+l\,(x^2+y^2-a^2),$$

且令

$$\begin{cases} L_x'=a+y+2l\,x=0, \\ L_y'=x+2l\,y=0, \\ L_l=x^2+y^2-a^2=0. \end{cases}$$

通过消去 l, x，容易得到方程 $2y^2+ay-a^2=0$，由此解出 $y=-a, \dfrac{a}{2}$. 显然，$y=-a$ 不合要求（此时三角形退缩为一点，对应于三角形面积取得最小值的情形）；而当 $y=\dfrac{a}{2}$ 时，$x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}a$，对应于三角形面积的最大值为 $S_{\max}=\dfrac{3\sqrt{3}}{4}a^2$.

［注 1］容易知道，上述最大面积的等腰三角形，其实就是一个每边长为 $\sqrt{3}a$ 的正三角形.

［注 2］ 由 $S \le S_{\max}$ ，并以 $a^2 = x^2 + y^2$ 代入，又可得到一个不等式：

$$x\left(\sqrt{x^2+y^2}+y\right) \le \frac{3\sqrt{3}}{4}\left(x^2+y^2\right).$$

［思考题］当把题中的圆 $x^2+y^2=a^2$ 改为椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 时，结果又将如何？大家不妨自己去算一算.

三、证明题

（1） 证明：方程 $x^7 - x^5 + x = c\ (c>0)$ 必有正根.

［证］ 证明需要用到连续函数的介值性定理，即若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上为一连续函数，且有 $f(a) \ne f(b)$，则 $f(x)$ 在 (a,b) 内能取得 $f(a)$ 与 $f(b)$ 之间的一切值.

设 $f(x) = x^7 - x^5 + x$，显然它在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续. 因为

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x^7\left(1-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^6}\right) = +\infty,$$

故由无穷大量的定义，对于任意正数 $c>0$，必定存在 $X>0$, 使得 $x>X$ 时 $f(x)>c$. 现取 $b = X+1$，于是有 $0 = f(0) < c < f(b)$. 利用介值性定理，$\exists x_0 \in (0,b)$，满足

$$f(x_0)=c,\ \text{即}\ x_0^7 - x_0^5 + x_0 = c.$$

（2）证明：若 $a_n > 0$，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 亦收敛.

［证］ 由于 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，因此 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$，于是当 n 足够大时，$0 < a_n < 1$，从而又有 $0 < a_n^2 < a_n$. 依据正项级数的比较判别法，推知 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 收敛.

［注 1］ 也可利用比较判别法的极限形式，由

$$\lim_{n\to\infty}\frac{{a_n}^2}{a_n}=\lim_{n\to\infty}a_n=0,$$

同样证得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}{a_n}^2$ 收敛.

［注 2］ 当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 为一般项级数时，不能直接使用比较判别法．事实上，上述命题一般也不成立，例如：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ 为收敛，而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)^2=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 却为发散.

（3）证明：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)2^{2n+1}}=-\frac{1}{2}+\arctan\frac{1}{2}$.

（ 提示：利用 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}$.）

［证］ 设 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}$. 通过逐项求导，得

$$S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n x^{2n}=\sum_{n=1}^{\infty}(-x^2)^n$$
$$=\frac{-x^2}{1+x^2}=-1+\frac{1}{1+x^2}.$$

由于 $S(0)=0$, 因此有

$$S(x)=S(x)-S(0)=\int_0^x S'(t)dt=\int_0^x\left(-1+\frac{1}{1+t^2}\right)dt=-x+\arctan x.$$

于是求得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)2^{2n+1}}=S\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}+\arctan\frac{1}{2}.$$